APPLICAZIONI DEL TEOREMA DELLA Q.d.M.
IN REGIME PERMANENTE

5.9 - Spinta dinamica di un getto libero contro una parete piana

a) Parete normale al getto fig. 5.4)

Sia F la risultante delle forze dinamiche di pressione esercitate dal fluido contro la parete; -F è la forza esercitata dalla parete sul fluido, e rappresenta l'unica forza "esterna" agente sul volume di controllo compreso fra le sez. 1 e 2 nella direzione x .
Infatti la pressione atmosferica, agente su tutto il contorno chiuso, ha risultante nulla su x e nulla è la componente del peso G_x . Dalla (5.20) segue: $-F = \rho Q\,(0-U)$, essendo $\beta = 1$ per l'uniforme distribuzione della velocità, $U_{2x} = 0$ e $U_{1x} = U$. Detta Ω la sezione del getto si ha quindi

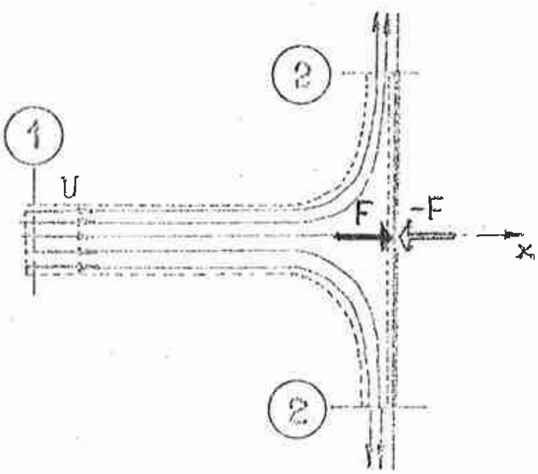

Fig. 5.4

(5.21) $$F = \rho\, Q\, U = \rho\, \Omega\, U^2$$

Se la parete è in moto con la velocità $\underline{v}$, il getto la colpisce con la velocità relativa U - v e l'eq. della Q.d.M., applicata al volume di controllo in moto uniforme con velocità v, diventa $F = \rho\, \Omega\, (U - v)^2$.
Solo la portata $(U - v)\Omega$ agisce sulla parete, la frazione Ωv va ad allungare il getto.

b) Parete inclinata di un angolo $\vartheta \neq 90°$ rispetto al getto (fig. 5.5).

F è ancora la risultante delle forze dinamiche di pressione esercitate dal fluido contro la parete. Si assume un comportamento "ideale" del fluido, per cui sulla parete non agiscono pressioni tangenziali e la velocità mantiene il valore costante U lungo ogni linea di corrente. Si possono scrivere le seguenti equazioni

(5.22) Eq.ne di continuità:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

(5.23) Eq.ne Q.d.M. su x :

$$-F = 0 - \rho\, Q_1\, U \,\text{sen}\, \vartheta$$

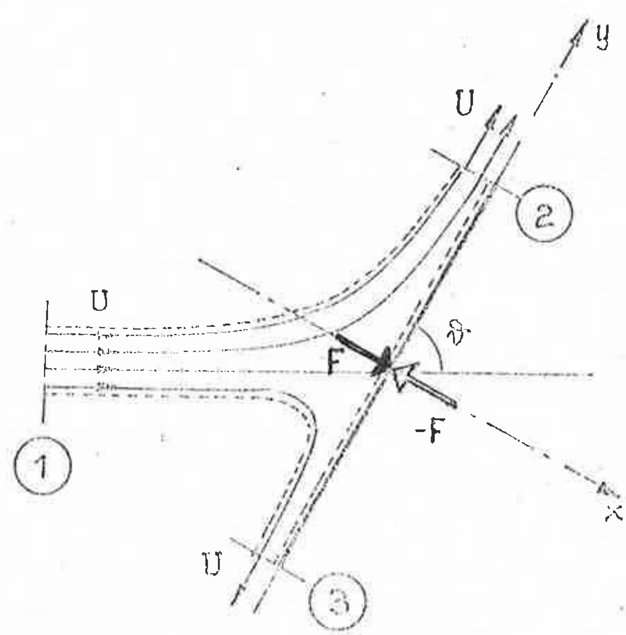

Fig. 5.5

(5.24) Eq.ne Q.d.M. su y: $0 = \rho Q_2 U - \rho Q_3 U - \rho Q_1 U \cos\vartheta$

Dalla (5.23) deriva l'espressione della spinta dinamica

(5.25) $$F = \rho Q_1 U \operatorname{sen}\vartheta$$

e dalle (5.22) e (5.24) deriva il frazionamento delle portate

(5.26) $$Q_2 = \tfrac{1}{2} Q_1 (1 + \cos\vartheta) \; ; \quad Q_3 = \tfrac{1}{2} Q_1 (1 - \cos\vartheta)$$

5.10) - Spinta dinamica contro una pala a cucchiaio; turbina ad azione tipo Pelton (fig. 5.6)

Per tener conto dell'effetto della viscosità del fluido, si pone la velocità all'uscita dalla pala (sez. 2) pari a $c_v U$, con c_v un coeff. $\lesssim 1$ riduttore della velocità (di norma $c_v = 0{,}98 \div 0{,}99$). Applicando l'eq.ne della Q.d.M. nella direzione x segue

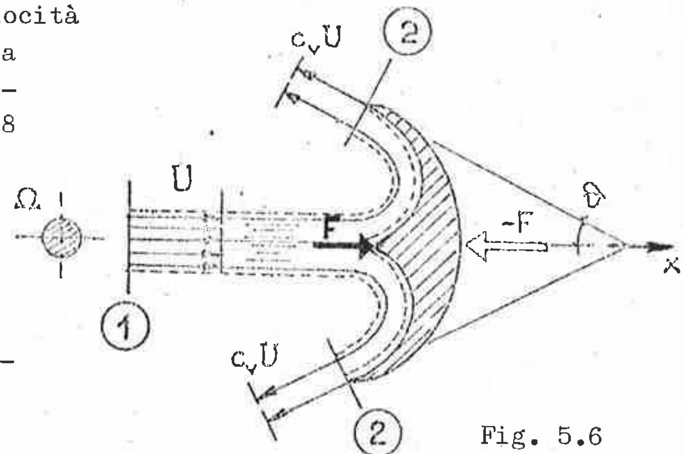

Fig. 5.6

(5.27) $$-F = \rho Q \left[(-c_v U \cos\vartheta) - U \right]$$

perchè la velocità all'uscita ha componente negativa su x . Quindi

(5.28) $$F = \rho Q U (1 + c_v \cos\vartheta) = \rho \Omega U^2 (1 + c_v \cos\vartheta)$$

Se la pala si muove con velocità $\underline{v}$ si potrebbero ripetere le considerazioni svolte nel caso a) del n. 5.9. Ma se la pala, come accade in una ruota Pelton (turbina ad azione), è seguita da una serie di altre pale, le perdite d'acqua per allungamento del getto diventano trascurabili e si può ritenere che la ruota utilizzi tutta la portata Q del getto. Si ottiene quindi

(5.29) $$F = \rho Q (U - v)(1 + c_v \cos\vartheta)$$

La potenza utile è $P_u = F v = \rho Q (U - v) v (1 + c_v \cos\vartheta)$

la potenza totale è $P_t = \frac{1}{2} \rho Q U^2$ (disponibile nel getto)

Il rendimento vale

(5.30) $$\eta = \frac{2 (U-v) v (1 + c_v \cos\vartheta)}{U^2} \; ; \quad \eta_{max} = \frac{1 + c_v \cos\vartheta}{2}$$

per $v = U/2$.

5.11 - Propulsione a getto (motore a reazione)

Si assume che la macchina si muova in aria, inizialmente in riposo, con una velocità uniforme $-U_1$. Con riferimento al volume di controllo (mobile con vel. $-U_1$) compreso fra le sez. 1 e 2 della fig. 5.7, si osserva che l'aria entra con la vel. U_1 e brucia una piccola quantità di combustibile; i gas sono quindi espulsi con una vel. relativa $U_2 \gg U_1$. Indicando con F la risultante delle pressioni esercitate dal reattore sul fluido e trascurando la portata del combustibile in confronto alla portata massica ρQ del comburente, si ha

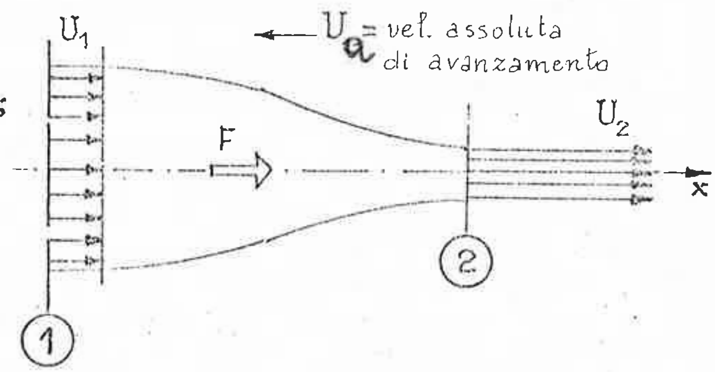

Fig. 5.7

$$(5.31) \qquad F = \rho Q (U_2 - U_1) = \rho Q U_a$$

essendo U_a la vel. assoluta di uscita dei gas combusti. Essa comporta una perdita di potenza pari all'energia cinetica del getto $\frac{1}{2} \rho Q U_a^2$; quindi si ottiene

Potenza utile $\qquad P_u = F U_1 = \rho Q U_1 U_a$

Potenza totale $\qquad P_t = F U_1 + \frac{1}{2} \rho Q U_a^2 = \rho Q U_a U_1 (1 + \frac{1}{2} \frac{U_a}{U_1})$

$$(5.32) \qquad \text{Rendimento} \qquad \eta = \frac{P_u}{P_t} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} U_a/U_1}$$

Il rendimento aumenta sia diminuendo la vel. assoluta di uscita (ma in tal caso occorre aumentare la portata affinchè la spinta F resti inalterata), sia aumentando la velocità U_1 di avanzamento.

APPLICAZIONI DEL TEOR. DEL MOMENTO DELLA Q.d.M. IN REGIME PERMANENTE

5.12 - Turbine a reazione e pompe

Isolando un condotto della girante, in moto uniforme con la vel. angolare ω , indichiamo con $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ le velocità assolute di entrata e di uscita del fluido (V. fig. 5.8). Detti r_1 ed r_2 i raggi delle corone esterna ed interna della girante ed $\vec{\mathfrak{M}}$ la coppia motrice ($-\vec{\mathfrak{M}}$ è il mom. esercitato dalle forze esterne sul vol. di controllo tratteggiato fra le sez. 1 e 2), il teor. del momento della Q.d.M. si scrive

$$(5.33) \qquad -\vec{\mathfrak{M}} = \rho Q (\vec{v}_2 \times \vec{r}_2 - \vec{v}_1 \times \vec{r}_1)$$

Come mostra la fig. 5.9, i prodotti vettoriali $\vec{v} \times \vec{r}$ sono vettori diretti secondo l'asse di rotazione e di modulo $|V\ r \cos\vartheta|$. Proiettando la (5.33) nella direzione dell'asse di rotazione, si ottiene

$$(5.34)\quad \mathcal{M} = \rho\, Q\, (v_1 r_1 \cos\vartheta_1 - v_2 r_2 \cos\vartheta_2)$$

e quindi, essendo la potenza utile $P_u = \mathcal{M}\omega$, segue, per unità di peso del fluido:

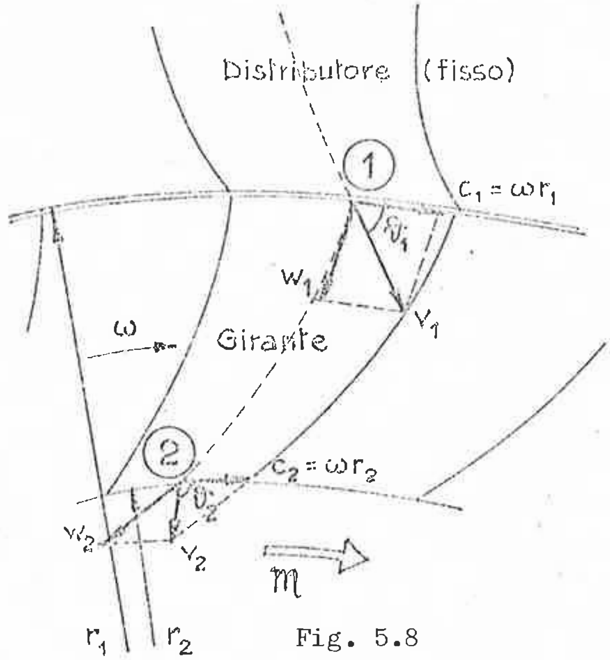

Fig. 5.8

$$(5.35)\quad \frac{P_u}{\gamma Q} = \frac{\omega v_1 r_1 \cos\vartheta_1 - \omega v_2 r_2 \cos\vartheta_2}{g} = \frac{v_1 c_1 \cos\vartheta_1 - v_2 c_2 \cos\vartheta_2}{g}$$

con $c_1 = \omega r_1$ e $c_2 = \omega r_2$ le velocità periferiche.

Nelle turbine il miglior rendimento si ottiene con una velocità di uscita radiale:

$\vartheta_2 \simeq 90°$. Per cui $P_u = \rho\, Q_1\, v_1\, c_1 \cos\vartheta_1$.

Nelle pompe la potenza espressa dalla (5.35) dev'essere negativa (acquistata dal fluido) e quindi il miglior rendimento si ottiene con $\vartheta_1 \simeq 90°$ e con c_2 il più grande possibile: $P_u = -\rho\, Q^2 v_2\, c_2 \cos\vartheta_2$. Ciò spiega la convenienza a fare le turbine "centripete" e le pompe "centrifughe"; ossia quest'ultime con il verso del moto del fluido opposto a quello indicato nella fig. 5.8 .

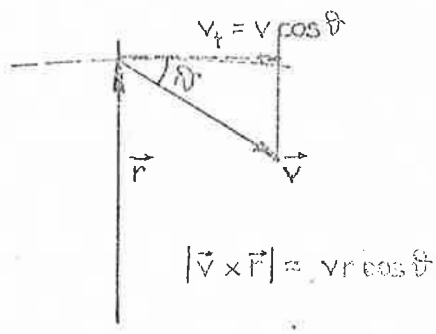

Fig. 5.9